Орёл Е.Н.

Возможности оптимизации процессов управления при изопериметрических ограничениях

Аннотация: Для задач оптимального управления с изопериметрическими ограничениями изучаются возможности построения глобального экстремума или его приближения. Конкретное приближенное решение построено для задачи Дидоны.

Ключевые слова: оптимальное управление, изопериметрические ограничения, задача Дидоны, глобальный экстремум, дополнительные переменные, движение по ячейкам

В математических моделях оптимального управления может присутствовать несколько функционалов. Один из них, J_0, оптимизируется. Значения остальных функционалов, $J_i,\ i = 1,\dots,\nu$, должны лежать в заданных пределах. Так, в экономических задачах функционалами могут быть суммарная выручка за период, издержки разного вида, прибыль и так далее. Тем самым получаем математическую задачу на условный экстремум. Её можно решать методом множителей Лагранжа, введя функционал

$$\Phi = J_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i J_i.$$

Однако, найдя решение этим методом, мы не сможем проверить, обеспечивает ли оно глобальный экстремум, поскольку общих критериев такой проверки не существует.

С помощью известного приёма [1] можно преобразовать задачу так, чтобы остался только один функционал, причём вместо остальных функционалов будем иметь дополнительные переменные с уравнениями $\dot{y}_i = L_i$. Здесь лагранжиан L_i – подынтегральное выражение функционала J_i.

Теперь для того, чтобы найти точный (или приближённый) глобальный экстремум, нужно построить непрерывное (или дискретное) поле экстремалей [2-6]. Непрерывное поле построить в общем случае нелегко, учитывая, что число переменных увеличилось. Для классической задачи вариационного исчисления – задачи Дидоны – такое поле состоит из дуг окружностей, выходящих из стартовой точки плоскости $(x_0, 0)$ с центрами в точках (a, b), где $a \leq x_0$, $b > 0$, и расположенных в полуплоскости $y \geq 0$. Заметим, что, хотя через каждую точку полуплоскости $y > 0$ проходит бесконечное число таких дуг, но все они имеют разную длину, которая и является дополнительной переменной. Таким образом, подмножество трёхмерного пространства точек $(t, x, y), t, y > 0$, где t – длина дуги, однократно покрывается упомянутыми дугами. Эти дуги и составляют поле экстремалей, для которого легко проверяется условие Вейерштрасса.

Посмотрим теперь, как в этой задаче работает приближённый метод решения. Согласно методу ломаных Эйлера, будем составлять кусочно гладкие кривые из отрезков. Для этого выберем фиксированную длину отрезка Δt. Кроме того, надо задать шаг по углу $\Delta\varphi$. Чем меньше Δt и $\Delta\varphi$, тем точнее будет приближение, но тем больше потребуется памяти вычислительных средств. Тем самым мы автоматически делаем длину кривой дискретной и равной $n\Delta t$, где n – произвольное натуральное число. При этом, как легко видеть, точки плоскости, по которым проходят наши ломаные, не образуют дискретную решётку – в принципе, двигаясь по ломаным, можно попасть в любую сколь угодно малую окрестность любой точки полуплоскости. Напомним, что площадь, ограниченная замкнутой кривой, вычисляется криволинейным интегралом второго рода

$$\frac{1}{2}\oint xdy - ydx.$$

Для отрезка ломаной, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), этот интеграл превращается в простое выражение $x_1y_2 - x_2y_1$.

Помимо семейства ломаных, естественно, надо задать разумные границы перемещения по полуплоскости $y > 0$. Полученную ограниченную область надо разбить на конечное число ячеек – квадратов с шагами по осям $\Delta x = \Delta y > 0$. Текущее состояние системы будет определяться тремя параметрами (i, j, k), где $i\Delta t$ – длина кривой, (j, k) – номер ячейки. Каждому такому состоянию будет соответствовать точка (x, y), $j\Delta x \leq x < (j + 1)\Delta x$, $k\Delta y \leq y < (k + 1)\Delta y$, которую следует понимать как наиболее перспективную точку ячейки. Эти точки меняются в процессе перебора. Таким образом, мы не стремимся попасть в точки какой-то заранее заданной решётки, предоставляя возможность системе самой выбирать перспективную точку ячейки. *Это – принципиально важный момент предлагаемого подхода [2-6], обусловливающий его универсальность.*

Для восстановления экстремалей полезно хранить в каждой ячейке трёхмерный номер предыдущей ячейки, хотя это и не обязательно. На приводимом рисунке показан результат работы программы перебора ломаных. На монитор были выведены некоторые построенные программой ломаные, опирающиеся на отрезок AB.

Визуально построенные ломаные мало отличаются от дуг окружностей. Можно увеличить точность, уменьшая элементарные отрезки, углы поворота и размеры ячеек. Тогда отличие полученных ломаных от дуг окружностей будет внешне совсем незаметно. Данный подход можно легко использовать при решении любых прикладных задач оптимального управления на глобальный экстремум с изопериметрическими ограничениями. Проклятие размерности, усугубляющееся появлением дополнительных переменных, может быть преодолено благодаря современным возможностям хранения массивов данных.

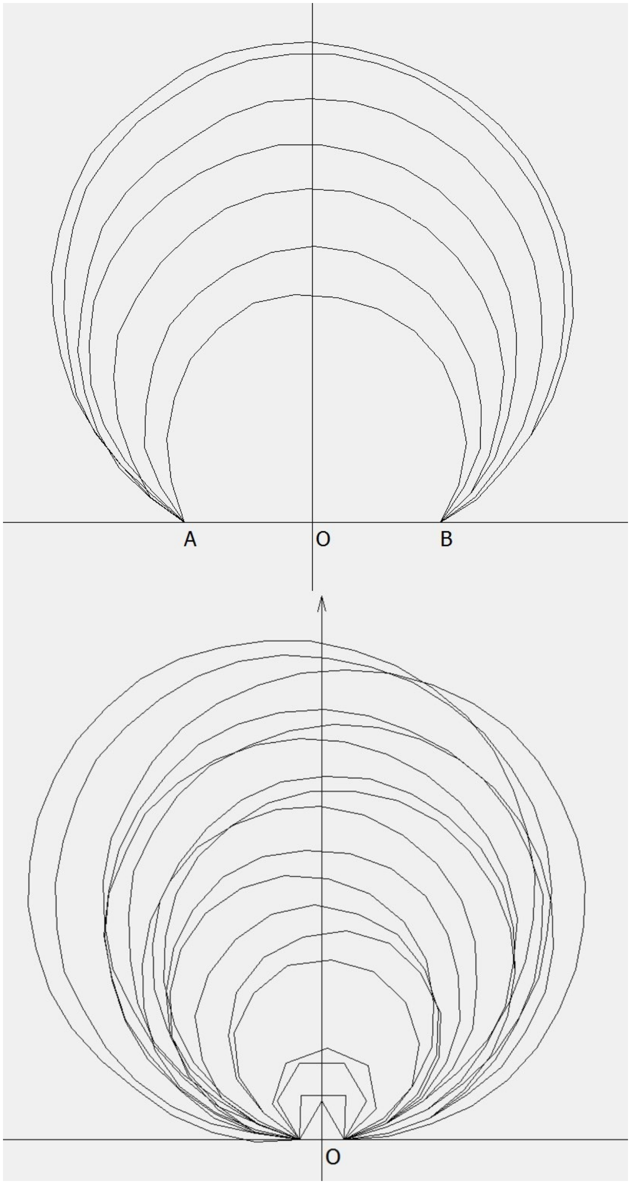

Рис. 1 – Оптимальные ломаные в задаче Дидоны

Литература:

1. Kamien N.I., Shwartz N.L. Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and Management. – N.-Y.: Elsevier, 1991 – 378 p.
2. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Динамическая оптимизация: поиск абсолютного экстремума. – М.: Инфра-М, 2019. – 162 с.
3. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Динамическая оптимизация и кусочно постоянные функции на множестве состояний // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2019. – № 1. – С. 1-22.
4. *Орёл Е.Н.* Метод решения задач оптимального управления // Доклады АН СССР. –1989. – Т. 306. – № 6. – С. 1301-1304.
5. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Центральные поля оптимальных траекторий // Доклады Академии Наук. –2014. – Т. 458. – № 4.– С. 402-405.
6. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Оптимальное управление процессом производства при выполнении заказа к заданному сроку // Экономика и математические методы. – 2016. – Т. 52. – № 2. – С. 65-77.