Агаев Р.П., Никифоров С.В.

Методы регуляризации в многоагентных системах первого и второго порядка с орграфом влияний, не содержащим остовного исходящего дерева

Аннотация: В работе описано условие достижения консенсуса в многоагентных системах первого и второго порядков с несвязным орграфом коммуникаций. Обобщены некоторые ранее полученные результаты. Приведены несколько методов регуляризации как для дискретной модели первого порядка, так и для непрерывных моделей первого и второго порядка.

Ключевые слова: многоагентные системы, консенсус, собственный проектор, лапласовская матрица орграфа, регуляризация

1. Некоторые определения и постановка задачи

В задачах управления многоагентными системами лапласовская и связанные с ней матрицы занимают центральное место. Отметим, что в многоагентных системах управленческое решение принимается не одним лицом или агентом, мнение которого считается наилучшим, а формируется в результате согласований или «переговоров» агентов, каждый из которых обменивается решениями или мнениями только со своими соседями. В такой системе орграфу коммуникаций $G(V, E)$ с множествами вершин V и дуг E соответствует лапласовская матрица $L = L(G) = (l_{ij}) \in R^{n\times n}$, которая определяется следующим образом: при $j \ne i$, $l_{ij} = -w_{ji}$ (w_{ij} – вес дуги (i, j)), когда $(i, j) \in E(G)$ и $l_{ij} = 0$ в противном случае; $l_{ii} = -\sum\limits_{j\ne i} l_{ij}$. Основные результаты по применению лапласовких и связанных с ними матриц в задачах управления многоагентными системами приведены в [1-4].

Будем рассматривать многоагентные системы только с ориентированным графом влияний (орграфом).

Рассмотрим базовую непрерывную модель консенсуса [5,6]:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. Модель (1) при любом векторе начальных условий $x(0)$ сходится к вектору с одинаковыми компонентами тогда и только тогда, когда соответствующий этому процессу орграф коммуникаций имеет остовное исходящее дерево или, эквивалентно, матрица L имеет единственное нулевое собственное значение.

ПустьJ – собственный проектор для L, т.е. проектор на $N(L)$ вдоль $R(L)$, т.е. идемпотентная матрица, для которой выполняется $R(J) = N(L)$ и $N(J) = R(L)$, где $R(\cdot)$ и $N(\cdot)$ — соответственно образ и ядро матрицы.

2. Дискретные модели

Первая дискретная модель консенсуса приведена Де Гроотом. Если $s(0) = (s_0^1, \dots, s_0^n)^{\mathrm{T}}$ – вектор начальных мнений членов группы из n агентов, а $s(1) = (s_1^1, \dots, s_1^n)^{\mathrm{T}}$ – вектор мнений на следующем шаге, то $s(1) = Ps(0)$, где $P = (p_{ij})$ – стохастическая матрица, элемент которой p_{ij} задает степень влияния мнения j-го агента на мнение i-го. На k-м шаге получаем вектор мнений $s(k) = Ps(k-1) = P^k s(0)$. Согласие достижимо, если при некотором $\bar{s} \in \mathrm{R}$ для всех i имеет место $\lim\limits_{k \to \infty} s_k^i = \bar{s}$. Это возможно в том и только том случае, если существует предельная матрица $\lim\limits_{k \to \infty} P^k = J$ (предполагаем, что у матрицы P диагональные элементы положительны и поэтому предел всегда существует), и все ее строки совпадают, иными словами, если матрица P регулярна. Таким образом, в модели Де Гроота достижение консенсуса определяется сходимостью степеней стохастической матрицы влияний.

В [1, 6] приведены некоторые достаточные условия сходимости степеней P^k к матрице с одинаковыми строками: одно из них – наличие положительного столбца в матрице P^k при некотором k, т.е. принадлежность P^k классу матриц Маркова; другое – взаимная достижимость всех состояний цепи Маркова, соответствующей матрице P, и ее апериодичность (в этом случае P примитивна).

Пусть все компоненты вектора π неотрицательны и их сумма равна единице. Вектор π называют *стационарным* для стохастической матрицы P, если он является левым собственным вектором P, соответствующим собственному значению 1, т.е. $\pi^{\mathrm{T}} P = \pi^{\mathrm{T}}$.

Известно, что если согласие достижимо при любых начальных мнениях, и согласованное мнение равно $\pi^{\mathrm{T}} s(0)$, то вектор π – единственный стационарный вектор для P.

Если в орграфе коммуникаций не существует остовного исходящего дерева, то согласие, вообще говоря, не достигается. Но, оно может быть достигнуто при векторах начальных мнений, принадлежащих определенной области.

В [2] при решении задачи согласования характеристик для дискретной модели Де Гроота был предложен метод ортогональной проекции. Согласно этому методу пространство всевозможных начальных мнений отображается на специальное подпространство T_P - область сходимости процедуры Де Гроота. В качестве такого преобразователя S используется матрица-проектор с образом$\mathcal{R}(S)$. На самом деле $\mathcal{R}(S)$ совпадает с линейной оболочкой векторов, состоящих из линейно независимых столбцов матрицы $I - P$ и вектора из единиц. Если x_0 – вектор начальных мнений, а x_0' – преобразованный вектор, то $\|x_0' - x_0\|$ будет минимальным, поскольку матрица-проектор S является симметричной. Очевидно, что данный метод имеет определенный недостаток: после преобразования исходного вектора некоторые координаты преобразованного вектора могут иметь отрицательные значения. Однако, $P^{\infty} S$ является стохастической матрицей.

Если исходная матрица P является правильной, т.е. у нее нет собственного значения, отличающегося от единицы, равного по модулю единице, то итоговый вектор метода ортогональной проекции не зависит от мнений «не основных агентов» (назовем агента i не основным, если в соответствующем орграфе коммуникаций бикомпонента, содержащая вершину i, достижима из других вершин базовой бикомпоненты).

В [2] приводится еще один способ регуляризации процесса согласования характеристик для достижения консенсуса. Предлагается в качестве альтернативы метода ортогональной проекции, т.е. матрицы S, использовать стохастическую матрицу, переводящую векторы начальных мнений в векторы, принадлежащие области согласия и одновременно являющуюся наилучшим приближением. Качество наилучшего приближения можно проверить некоторой матричной нормой, например, евклидовой нормой. Здесь имеет смысл дополнительно потребовать, чтобы введенная матрица была идемпотентна с образом T_P. В противном случае она будет изменять некоторые векторы начальных мнений, не нуждающиеся в предкоррекции, уже лежащие вT_P. Задача нахождения такой матрицы имеет много общего с классической задачей аппроксимации матриц. В литературе по теории матриц эти задачи хорошо изучены и в основе этих исследований лежит сингулярное разложение матриц.

В [2] введена еще одна матрица $\tilde{S}$, у которой первые b (число основных агентов) строк совпадают с первыми строками матрицы S, а остальные строки – со строками матрицы P. Полученная матрица $\tilde{S}$ по определению может не являться идемпотентной, но евклидова норма разницы $P - \tilde{S}$ будет строго меньше аналогичной нормы для разницы $P - S$. В [2] доказано, что если матрица P – правильная, то двухэтапная процедура согласования характеристик с помощью матрицы $\tilde{S}$ и дальнейшей коррекцией P^k совпадает с методом ортогональной проекции.

Поскольку, задача согласования характеристик для дискретных моделей тесно связана с проблемой ранжирования страниц в интернете, результаты, полученные для задачи PageRank, могут быть использованы при согласовании характеристик в многоагентной системе. С другой стороны, дискретные модели всегда можно расширить до непрерывных моделей, и, таким образом, методы PageRank могут быть применены для дифференциальных моделей.

Для решения задачи PageRank используется *регулирующая матрица* $M = P + (1/n)ae^T)$, где $a_i = 1$, если на i-й странице нет никаких ссылок, а e - вектор, состоящий из единиц. В некоторых работах вводят Google-матрицу G, являющуюся выпуклой комбинацией двух матриц – M и $(1/n)ee^T$:

$$G = \alpha M + (1-\alpha)1/n(ee^T) \qquad (2)$$

Матрица G – стохастическая, положительная. Поэтому собственный вектор, соответствующий единичному собственному значению определяется однозначно с точностью до множителя.

В некоторых работах в качестве регуляризации используются итеративные методы достижения результата. Однако, в основе этих методов лежит степенной метод определения собственного вектора неотрицательной матрицы.

Более универсальный метод регуляризации для задач достижения консенсуса предложен в [4]. В основе многих протоколов регуляризации лежит лемма, согласно которой, если для матриц A и C имеет место $AC = A, C^2 = C$, $\delta > 0$ и действительные части собственных значений матрицы $\delta I + A$ положительны, то

$\lim_{t\to\infty} e^{-(A+\delta C)t} = (I - C)(I + \delta^{-1}A)^{-1}$.

Из этого утверждения, в качестве частного случая получаются явные выражения как для задач регуляризации в многоагентных системах, а также ранжирования страниц в Интернете.

3. Регуляризация для непрерывных моделей первого и второго порядков

Рассмотрим дифференциальную модель первого порядка поиска консенсуса, описываемую системой уравнений:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где L – не зависит от времени.

Рассмотрим протокол поиска консенсуса для непрерывной модели первого порядка, согласно которому к исходному орграфу зависимостей добавляется полный взвешенный орграф «фоновых связей» с весами δ/n:

$$\dot{x}(t) = -(L + \delta K)x(t).$$

Утверждение. Если $x(t)$ – решение указанной модели, то

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to\infty} x(t) = EJx(0).$$

А теперь рассмотрим модель второго порядка, где $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ – состояние и скорость системы.

Пусть $\dot{\xi}_i = \zeta_i,\ \dot{\zeta}_i = u_i$, где

$$u_i = -\sum_{j=1} a_{ij}\left[\left(\xi_i - \xi_j\right) + \gamma\left(\zeta_i - \zeta_j\right)\right],$$

протокол согласия имеет следующее представление:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -L & -\gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

В таких системах единственность нулевого собственного значения лапласовской матрицы является необходимым, но не достаточным условием для консенсуса. При определенном ограничении на параметр γ, входящий в систему, консенсус также определяется единственным нормированным левым собственным вектором лапласовской матрицы. Здесь мы изучим более общий случай, когда ограничение на параметр γ удовлетворяет определенному условию, но кратность нулевого собственного значения лапласовской матрицы больше единицы.

Для такого случая поведение системы однозначно описывается собственным проектором лапласовской матрицы орграфа коммуникации. Если (согласно [7]) для γ выполняется условие

$$\gamma^2 > \max_{\mu_i \neq 0} \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu_i)} \cdot \frac{\mathrm{Im}^2(\mu_i)}{\mathrm{Im}^2(\mu_i) + \mathrm{Re}^2(\mu_i)}, \qquad (4)$$

а кратность нулевого собственного значения матрицы L равна m, то для достаточно большего значения t и $\delta \to 0$ асимптотическое поведение системы (3) будет иметь следующее представление:

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes J \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где J – идемпотентная матрица, являющаяся собственным проектором лапласовской матрицы.

В случае достижения консенсуса при любом векторе начальных значений все строки матрицы J одинаковы (столбцы данной стохастической матрицы пропорциональны).

Для многоагентной системы второго порядка при достижении консенсуса формула (5) полностью описывает линии развития характеристик отдельных агентов.

Однако если ноль не является простым собственным значением в многоагентной системе второго порядка, токонсенсус достигается не для каждого вектора начальных характеристик. В этом случае возникает необходимость в регуляризации протокола консенсуса.

Рассмотрим протокол, согласно которому к исходному орграфу зависимостей добавляется полный простой граф с весами δ, а консенсус определяется пределом, при значенииδ, стремящемся к нулю.В [4] такой протокол был назван протоколом с фоновыми связями. Применив описанный метод регуляризации к многоагентным системам второго порядка мы получим следующий протокол регуляризации:

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}(t)\\ \dot{\zeta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{n\times n} & I_n\\ -(L+\delta K) & -\gamma(L+\delta K)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \zeta(t)\end{bmatrix} \tag{6}$$

Утверждение 1. (Основной результат). Если для γ выполняется условие(4), а кратность нулевого собственного значения матрицы L равна m, то для достаточно большего значения t и $\delta \to 0$ асимптотическое поведение системы (4) будет иметь следующее представление:

$$\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \zeta(t)\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} \otimes EJ \begin{bmatrix}\xi(0)\\ \zeta(0)\end{bmatrix} \tag{7}$$

Выражение (7) обобщает некоторые результаты, полученные ранее в [4,6].

Другие протоколы регуляризации, приведенные в [4] также можно использовать в многоагентных системах второго порядка и можно доказать, что «усреднение» характеристик, так или иначе, определяется произведением стохастической матрицы Eи собственного проектора лапласовской матрицы.

В отличие от ранее предложенных методов регуляризации, использованные методы не подвергают изменению векторы начальных характеристик, а требуют лишь добавления или слабых фоновых связей, либо «скрытого агента», т.е. вершины орграфа, одинаково влияющего на других агентов.

По протоколу второго порядка консенсус достигается как по состоянию, так и по скорости. Но, до согласования характеристик периодически в порядке очередности консенсус достигается по состоянию и скорости. При этом если консенсус достигается по состоянию, то по скорости значения максимально расходятся. И наоборот, при достижении согласия по скорости, разница по состоянию приобретает максимальное значения. Такие чередующиеся локальные консенсусы по истечении определенного времени в конце концов сводятся к глобальному согласию. Причина такого поведения системы связана со следующим фактором: когда нужен консенсус по состоянию, система ускоряется, и через какое-то время выравниваются состояния агентов. Но, при этом направления скоростей могут сильно отличаться. Аналогично, для достижения консенсуса по скорости изменение параметров агентов замедляется и возникает расхождение по состоянию.

Литература:

1. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* // Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов. Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136–15.
2. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2014. – V. 59. – № 9. – P. 2475–2479.
3. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* //Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
4. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Модели латентного консенсуса // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 1. – С. 106-107.
5. *Olfati-Saber R.* Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory //IEEE Transactions on automatic control. – 2006. – V. 51. – № 3. – P. 401–420.
6. *Ren W., Atkins E.* Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – V.17. – №10-11. – P.1002-1033.
7. *Liu H., Xie G., Wang L.* Necessary and sufficient conditions for solving consensus problems of double-integrator dynamics via sampled control //International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2010. –V.